

Задаци - трећа недеља

1. Нека је $(\mathcal{N}, \sigma, 0)$ модел природних бројева. Доказати да је $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \setminus \{0\}$.
2. (Јединственост природних бројева) Нека су $(\mathcal{N}_A, \sigma_A, 0_A)$ и $(\mathcal{N}_B, \sigma_B, 0_B)$ два модела природних бројева и нека је $f : (\mathcal{N}_A, \sigma_A, 0_A) \rightarrow (\mathcal{N}_B, \sigma_B, 0_B)$ хомоморфизам.
 - (а) Доказати: $f(m) = 0_B \Rightarrow m = 0_A$.
 - (б) Доказати да је f инјективно.
 - (в) Доказати да је f бијекција.
 - (г) Закључити да је скуп природних бројева јединствен до на изоморфизам алгебарских структура.
- 3.* Доказати да је $(\forall m, n \in \mathbb{N}) \ m + n = n + m$ и $m \cdot n = n \cdot m$. (помоћ: индукција по n)
4. Доказати да је $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ комутативни прстен са јединицом.
- 5.* Доказати да је $(\mathbb{N}, \leq)$ тотално уређен скуп.
- 6.* Нека је $(A, \leq)$ тотално уређен скуп, $K \subseteq A$ коначан. Доказати да тада постоје максимум и минимум скупа K , као и да се елементи тог скупа могу на јединствен начин поређати у растућем поретку.
7. Доказати да сваки непразан подскуп од $(\mathbb{N}, \leq)$ има минимум. Да ли сваки подскуп од $(\mathbb{N}, \leq)$ има и максимум?